ISEN MON ??3 ∃ gf extens à q.

Leçons : 106, 108, 148, 158

dvpt : générateurs de O(E).

réf : TL1, ORAUX XENS N°3. Leçons : 106, 108, 148, 158.

[TL1] 383 (4e édit°) 4'30

Lemme : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans. Alors $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq \dim(E) - p$.

pour aller à la leçon L159 148

dem :

On fait une récurrence sur le nombre p d'hyperplans :

* si $p=1$, alors $\dim(H_1) = \dim(E) - 1$ par définition d'un hyperplan.
* supposons $p \geq 2$, le résultat étant vrai à l'ordre $p-1$ et soient $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans de E. On pose $F = \bigcap_{i=1}^{p-1} H_i$ et, d'après la formule de Grassmann on a : $\dim(F) + \dim(H_p) = \dim(F + H_p) + \dim(F \cap H_p)$.

cf [TL1] 383 (4e édit°)

Par HR et par définition d'hyperplan, on obtient donc :

$n - (p-1) + n - 1 \leq \dim(F + H_p) + \dim(F \cap H_p)$.

Finalement, comme $F + H_p \subset E$ on a $\dim(F + H_p) \leq \dim(E) = n$.

d'où $\dim(E) - p \leq \dim(H_p \cap F)$

11'

[X-ENS] p 61

Cartan-Dieudonné [ROMB] p 731

thm :

Soit $u \in O(E)$. Notons $r := rg(u - Id_E)$.

u est produit d'au plus r réflexions (les réflexions engendrent $O(E)$)

dem :

• On montre d'abord l'existence par une récurrence forte sur r.

ini : Si $r=0$ alors $u = id$ qui est un produit de 0 réflexion (par convention).

her : Soit $r \geq 1$ tq la propriété soit vérifiée pour tout $u \in O(E)$ avec $rg(u - id) < r$ et soit $u \in O(E)$ tq $rg(u - id) = r$.

Comme $u \neq id$ (car $r \neq 0$), il existe $e \in E$ tq $u(e) \neq e$. On a alors $(u(e) - e) \perp (u(e) + e)$ car $\langle u(e) - e, u(e) + e \rangle = \|u(e)\| + \|e\| = 0$ car $u \in O(E)$.

On considère alors la réflexion s par rapport à $\mathrm{Vect}(u(e) - e)^\perp$ qui vérifie : $\begin{cases} s(u(e) + e) = u(e) + e \\ s(u(e) - e) = -(u(e) - e) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s(u(e)) + s(e) = u(e) + e \\ s(u(e)) - s(e) = -u(e) + e \end{cases}$

et donc $\begin{cases} s(e) = u(e) \\ s(u(e)) = e \end{cases}$ c'est à dire que s échange e et $u(e)$.

Pour utiliser l'HR sur $v := s \circ u$, on va montrer que $rg(v-id) < r$
(comme u et s sont des isométries, v en est bien une par composition)
Pour cela, mq $\ker(u-id) \subsetneq \ker(v-id)$. (le théorème du rang nous donnera ce que l'on souhaite)

thm rg L148 $\Rightarrow$

* Soit $x \in \ker(u-id)$, i.e. $u(x) = x$. On a $v(x) = s(u(x)) = s(x)$
$\langle x, u(e)-e \rangle = \langle x, u(e)\rangle - \langle x, e\rangle = \langle u(x), u(e)\rangle - \langle x, e\rangle = \langle x, e\rangle - \langle x, e\rangle = 0$.
Ainsi $x \in Vect(u(e)-e)^\perp$ et on a par définition de s, $s(x) = x$
d'où $v(x) = x$. On a alors $\ker(u-id) \subset \ker(v-id)$.
* De plus, $e \in \ker(v-id) \setminus \ker(u-id)$ d'où l'inclusion stricte.

On a donc $rg(v-id) < r$ et par HR, il existe $s_1, \dots, s_p$ des réflexions de E tels que $s \circ u = s_1 \circ \dots \circ s_p$ et $p \leq rg(v-id)$.
Ainsi $u = s \circ s_1 \circ \dots \circ s_p$ qui est donc un produit de $p+1$ réflexions avec $p+1 \leq r$. L'hérédité est vérifiée.

faire comme ici

L 159
148

En fait $r = rg(u-Id)$ est le nombre minimal de réflexions que l'on doit avoir dans une décomposition $u = s_1 \circ \dots \circ s_p$.
En effet si $u \in O(E)$ s'écrit $u = s_1 \circ \dots \circ s_p$ où s_i est la réflexion par rapport à l'hyperplan H_i, on a $H_1 \cap \dots \cap H_p \subseteq \ker(u-id)$ et $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq \dim E - p$ (par notre lemme) d'où

$$r = rg(u-id) \leq p. \quad \text{(par le théorème du rang).}$$

L 171
170 $\Rightarrow$ gén $O^+(E)$

dev : Homéomorphisme de l'exponentielle $S_n \to S_n^{++}$.

Leçons : 152, 155, 156, 157, 158
ref : Caldero - HHGG1 p208 p357 ?

Thm : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

dem :

① Bien définie :
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.
Par le thm spectral : $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ $S = P\,\mathrm{diag}(\lambda_i)\,P^{-1}$
On a donc $\exp(S) = P\,\mathrm{diag}(\underbrace{e^{\lambda_i}}_{>0})\,P^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (car v.p. >0).

② Continue :
$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue donc elle reste continue par restriction sur $S_n(\mathbb{R})$

③ Surjectivité :
Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Par le thm spectral : $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ $B = P\,\mathrm{diag}(\mu_i)\,{}^tP$ et $\mu_i > 0$ (car $B \in S_n^{++}$)
$A := P\,\mathrm{diag}(\ln(\mu_i))\,P^{-1}$.
$\exp(A) = P\,\mathrm{diag}(\mu_i)\,P^{-1} = B$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$ car $\mathrm{diag} \in S_n(\mathbb{R})$ ${}^tP = P^{-1}$

④ Injectivité :
Soient $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$, $\exp(A) = \exp(A')$
$A \in S_n(\mathbb{R})$ donc toutes ses v.p. sont réelles, on les note λ_i. $i = 1, \dots, n$.
On pose alors Q le polynôme interpolateur de Lagrange : $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ $\forall i$.
$\exists P \in O_n$, $A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_i)\,P^{-1}$ (thm spectral).

$A = P\,Q(\mathrm{diag}(e^{\lambda_i}))P^{-1} = Q(\exp(A)) = Q(\exp(A'))$ qui commute avec A'.
Par le thm de diagonalisation simultanée :
$\exists P_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ $A = P_0\,\mathrm{diag}(\lambda_i)\,P_0^{-1}$ $A' = P_0\,\mathrm{diag}(\lambda_i')\,P_0^{-1}$
$\exp(A) = \exp(A') \Rightarrow \cancel{P_0}\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_i})\,\cancel{P_0^{-1}} = \cancel{P_0}\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_i'})\,\cancel{P_0^{-1}}$

$\Rightarrow e^{\lambda_i} = e^{\lambda_i'}$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$
$\Rightarrow \lambda_i = \lambda_i'$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$ car $\lambda_i, \lambda_i' \in \mathbb{R}$
Ainsi $A = A'$ ce qui montre l'injectivité.

⑤ Continuité de la réciproque :
Par caractérisation séquentielle.
Soit $(B_p)_p$ suite de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Par surj, soient $(A_p)_p \in S_n(\mathbb{R})$, $A \in S_n(\mathbb{R})$ tq $e^{A_p} = B_p$ $\forall p$, $e^A = B$.
Mq $(A_p)_p$ cv vers A :
- $(B_p)_p$ cv donc $(B_p)_p$ est bornée, en part pour $|||\cdot|||_2$.
- $(B_p)_p$, B sont inversibles car dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, par continuité du passage à l'inverse (B_p^{-1}) cv B^{-1} donc $(B_p^{-1})_p$ est bornée par $|||\cdot|||_2$.

Or pour $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $|||M|||_2 = \sqrt{\rho({}^tMM)} = \sqrt{\rho(M)^2} = \rho(M)$
- les v.p. de (B_p) sont majorées par $C > 0$
  minorées par $C' > 0$ car ceux de B_p^{-1} majorées

Les valeurs propres de A_p sont dans $[\ln C', \ln C]$ donc $(A_p)_p$ est bornée.
De plus A est la seule valeur d'adhérence de $(A_p)_p$:
Soit $\bar{A}$ une v.a. et $(A_{p_k})_k$ convergent vers $\bar{A}$. Par continuité de l'exponentielle, $\exp(\bar{A}) = B = \exp(A)$ et par inj, $\bar{A} = A$.
Ainsi la réciproque de l'exp est continue.